

5. Aufgabenblatt: Analysis 2

Lehrkräfteweiterbildung, 12 Q, Winter 2023/24

Dozent: Hans-Joachim von Höhne

Aufgabe 5.1 Untersuchen Sie, ob folgende uneigentlichen Integrale konvergieren, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

$$\begin{aligned} 1) \int_0^1 \ln x \, dx, & \quad 2) \int_1^3 \frac{2}{x \ln x} \, dx, \\ 3) \int_0^\infty x e^{-x^2} \, dx, & \quad 4) \int_0^\infty x \sin(x^2) \, dx, \\ 5) \int_0^\infty \frac{3x}{1+x^2} \, dx. & \end{aligned}$$

Aufgabe 5.2 Untersuchen Sie mit dem Integralkriterium, ob folgende Reihe konvergiert.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$$

Aufgabe 5.3 1) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend und beschränkt ist.

$$a_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$$

Somit existiert folgender Grenzwert, die *Euler-Mascheroni-Konstante*.

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) \approx 0,577216$$

2) Sei N die Anzahl der Sekunden, die seit dem Urknall vor 13,8 Milliarden Jahren vergangen sind. Wie groß ist dann $\sum_{k=1}^N 1/k$ ungefähr?

Hinweis zu 1): die ersten beiden Zeilen des Beweises von Satz 3.4 verwenden.

Aufgabe 5.4 Die Kugel K vom Radius R ist der Rotationskörper folgender Funktion.

$$f: [-R, R] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Berechnen Sie das Volumen und den Inhalt der Oberfläche von K .